

ОТНОСНО ТОЧНОСТТА НА ИЗМЕРВАНЕ НА МОДУЛА НА ЕЛАСТИЧНОСТ ЧРЕЗ ИМПУЛСНО РЕЗОНАНСЕН МЕТОД

Диян М. Димитров
Технически Университет – Варна
Катедра: Техническа механика

Abstract: Young's moduli (E), Shear Moduli (G) and Poisson ratio (ν) are parameters which describe elastic behaviour of materials. Static and dynamic methods are used to determine these parameters. Usually, dynamic methods have lower uncertainty. In this article E , G , and ν for high carbon steel sample are obtained using impulse excitation of vibration according to ASTM E1876– 09 procedure. Detailed explanation of calculation of combined uncertainty are provided. Steel block with dimensions ($t \times b \times L$) $9 \times 35 \times 90$ mm is measured. Calculated values are $E=204,1 \pm 1,2$ GPa, $G=78,42 \pm 0,88$ GPa $\nu=0,301 \pm 0,004$. Excluding, vibration detecting device, uncertainty of measurement of “ t ” and “ L ” gives higher contribution to combined uncertainty of E and G . As a general rule, not very thin samples with $L/t > 10$ ratio have to be preferred.

Key words: minimal resurs, cogged wheels, surface strengthening, row reductor

1. Въведение

Модулите на еластичност (E - модул на Юнг, G -модул на срязване) и коефициента на Поасон ν са трите параметъра описващи поведението на материалите в еластичната област. Без познаването на техните стойности е невъзможно пресмятането на коравината на конструкциите. Точното задаване на еластичните параметри на материала е важно при якостни пресмятания по МКЕ, при проектиране и изработване на силоизмерителни устройства работещи на тензометричен принцип, на резонатори и др. устройства работещи при променливи натоварвания.

Методиките за определяне на еластичните параметри се делят на статични и динамични. При статичните се използват изпитателни машини (опън/натиск, огъване, усукване) и се измерват деформациите на съответния образец при натоварване в еластичната област. При динамичните се използва връзката между скоростта на разпространение на звуковата вълна и еластичните свойства на материала. Директно скоростта на звуковата вълна може да бъде измерена чрез отчитане на времето за преминаването ѝ през образец с известна дължина. Аналогично пресмятане може да се направи чрез измерване честотата на една от фундаменталните форми на

трептене (огъваща, усукваща, надлъжна) на образец, който представлява греда с правоъгълно или кръгло напречно сечение. Неопределеността при пресмятането на еластичните модули е свързана с възможностите за точното определяне на няколко входни величини. Освен че са по-бързи и лесни за изпълнение динамичните методики се считат за по-точни (неопределеността при измерването е по-ниска) [1,2,3]. Тъй като деформациите на образците, са с няколко порядъка по-ниски динамичните методики се използват широко за крехки материали [4,5].

В редица изследвания е показано, че обикновено стойностите на модула на Юнг получени по статични методики са по-ниски от тези получени по динамични [5,6]. Това се дължи на възможността за поява на пластични деформации в локални обеми при съответното натоварване.

Методиките за пресмятане на модулите на еластичност на база собствените честоти на трептене са описани в съответните стандарти, като най-пълни и точни са стандартите на ASTM, E1876 – 09[7] и E1875 – 13[8]. И в двата стандарта се използва една и съща изчислителна процедура, като разликата е начина на възбуждане на вибрациите, в [7] е описана методика с импулсно възбуждане, а в

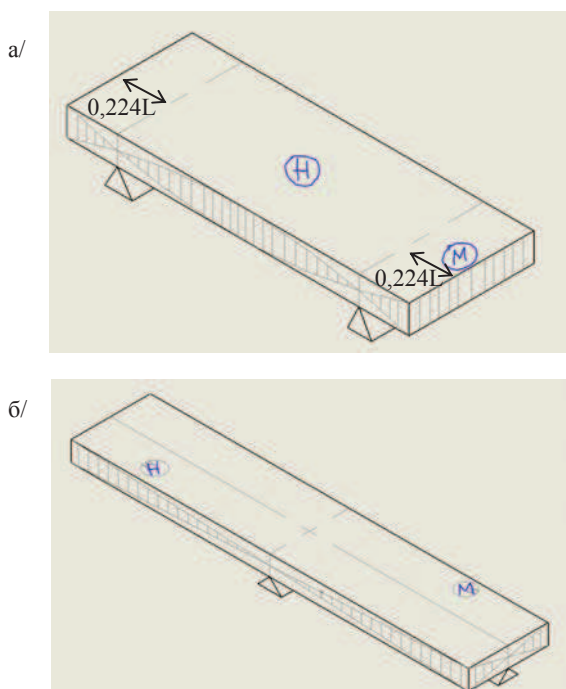
[8] е описана методика с хармонично възбуждане и търсене на резонанс.

Импулсното възбуждане е най-лесно осъществимо тъй като не изисква наличието скъпа измервателна апаратура. Достатъчно е да се разползва със микрофон включен към персонален компютър и съответния софтуер. Целта на настоящата публикация е да се опише процедурата за пресмятане на неопределеността при определяне на еластичните параметри при импулсно резонансният метод, да анализира факторите и да даде насоки за намаляването ѝ.

2. Изложение

2.1 Пресмятане на еластичните параметри чрез импулсно резонансен метод

Използват се образци тип „греда“ с правоъгълно или кръгло напречно сечение. Образците се закрепват във възлите на съответната форма (фиг.1) така че да се получат гранични условия на свободна греда.



Фиг. 1 Схема закрепване на призматичен образец и позици на възбуждане и приемане на трептенията (Н) –импулсен чук; (М) –микрофон
 а) фундаментална форма на огъване
 б) фундаментална форма на усукване

При импулсно възбуждане, записването на вибрациите, е най-удобно да се извършва безконтактно с помощта на микрофон. Сигнала

от микрофона се дигитализира и преобразува в честотен спектър от където се отчита честотата на съответната форма. За пресмятане на модулите на еластичност се използват зависимостите (1) и (2) изведени от теорията за греди на Ойлер-Бернули. Тъй като тази теория не отчита влиянието на срязващите и инерционните сили във зависимостите са добавени корекционните коефициенти T_1 и R , които са функция на геометричните размери и коефициента на Поасон. Коефициента на Поасон влиза във функцията за определяне на T_1 , но не и на R т.е за точно определяне на стойността на модулът на Юнг E се изисква задаването на ν . Ако коефициента на Поасон не е известен предварително и наличният образец е със съотношение $t/L < 20$, модулът на Юнг и коефициента на Поасон, за хомогенен и изотропен материал се определят след определянето на G , използвайки итеративна процедура до удоблетворяване на зависимост (3) с предварително зададена точност. За греди с $t/L \geq 20$ може да се използва опростената зависимост за T_1 (4), която не включва ν .

$$(1) \quad E = 0,9465 \frac{m \cdot f_f^2}{b} \cdot \frac{L^3}{t^3} \cdot T_1$$

$$(2) \quad G = \frac{4 \cdot L \cdot m \cdot f_t^2}{b} \cdot R$$

$$(3) \quad \nu = \frac{E}{2G} - 1$$

, където E [Pa]- модул на Юнг;

G [Pa] - Модул на плъзгане;

ν - коефициент на Поасон;

m [g]- маса;

L [mm] -дължина;

b [mm] - ширина;

t [mm] - височина;

f_f [Hz]-честота на фундаменталната форма на огъване;

f_t [Hz]-честота на фундаменталната форма на усукване;

$T_1 = f\left(\frac{t}{L}, \nu\right)$ -коректировъчен коефициент;

при $\frac{L}{t} > 20$ (4) $T_1 = 1,000 + 6,585 \left(\frac{t}{L}\right)^2$

$R = f\left(\frac{t}{L}, b\right)$ - корекционен коефициент.

2.2 Неопределеност при пресмятането на еластичните параметри чрез импулсно резонансен метод

Неопределеността на измерването на еластичните параметри се пресмята по закона за разпространение на грешките (5) като се отчете приноса от стандартната неопределеност при измерването на всяка от входните величини (масата, геометричните размери и съответните честоти).

$$(5) \quad U(Y) = \sqrt{\sum [c_i(U(x_i))]^2}$$

,където

$U(Y); U(x_i)$ - стандартни неопределености на изходната и входните величини;

$c_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$ - коефициенти на чувствителност (за

зависимости от типа (1),(2),(3) те са равни на степенните показатели);

Така ако пренебрегнем приноса на корекционните коефициенти и приемем че няма корелация между входните величини за стандартната неопределеност на E , G и ν получаваме съответно уравнения (6), (7), (8).

$$(6) \quad \frac{U(E)}{E} = \sqrt{\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u(f_f)}{f_f}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2 + \left(3 \cdot \frac{u(t)}{t}\right)^2 + \left(3 \cdot \frac{u(L)}{L}\right)^2}$$

$$(7) \quad \frac{U(G)}{G} = \sqrt{\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u(f_f)}{f_f}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2 + \left(\frac{u(t)}{t}\right)^2 + \left(\frac{u(L)}{L}\right)^2}$$

$$(8) \quad \frac{U(\nu)}{\nu} = \sqrt{\left(\frac{u(E)}{E}\right)^2 + \left(\frac{u(G)}{G}\right)^2}$$

Съгласно ISO 17025 стандартната неопределеност на директно измерваните величини се разделя на Тип А и Тип В, съответно Тип А е неопределеност оценена чрез статистически методи, а Тип В е всякаква друга неопределеност, която се оценява чрез способности различни от статистическия анализ (най-често от

сертификата на измервателния уред). При неопределеност Тип В, в повечето случаи се приема, че всички стойности са равновероятни (правоъгълно разпределение) и за да се приведе стойността към нормална неопределеност трябва да се използва делител $\sqrt{3}$. Най-често, измерваната величина се приема за нормално разпределена и получената комбинирана неопределеност се разширява с коефициент $k = 2$ (95%) или $k = 3$ (99,7%). Полученият резултат се записва във вида (9) като се допълнително се уточнява коефициента на разширение.

$$(9) \quad Y \pm U(Y)$$

За обработен образец (с отклонения от формата $< 0.1\%$) неопределеността при измерване на геометричните размери може да се приеме равна на точността на измерителния уред (Тип В).

Напречните размери обикновено се измерват с микрометър с точност $\pm 0.01 \text{ mm}$, в три сечения и се проверява отклонението от формата, а дължината с шублер с точност $\pm 0.05 \text{ mm}$.

Неопределеността при измерване на масата зависи от използваната везна. Тъй като тя има несъществен принос, при измерванията може да се използва и везна с точност $\pm 0.01 \text{ g}$.

При оценката на неопределеността на измерване на собствените честоти трябва да се вземат в предвид много фактори (демпфирането в опорите, точността на измервателната апаратура, околната температура и влажност на въздуха). Най-съществен принос към неопределеността според [9] има точността на електронната апаратура. В [7,8] се цитира проведен междулабораторен експеримент при който стандартната неопределеност при измерване собствената честота на огъване е $\pm 0.3\%$.

2.3 Пресмятане на еластичните параметри чрез импулсно резонансен метод

За пробен образец използваме блок от комплект плоско паралелни крайщни мерки с размери ($t \times b \times L$) $9 \times 35 \times 90 \text{ mm}$ ($t/L = 1/10$).

Образецът е изработен от високовъглеродна нисколегирана стомана.

Размерът „*f*“ беше измерен с микрометър с обхват 0-25mm с допълнителна дигитална скала отчитаща с точност ±0.001mm. При измерването на размера в различни сечения беше установено че разликата $t_{max} - t_{min} \leq 0.02mm$, което е равно на неопределеността при измерването със стандартен микрометър (±0.01mm). За изчислителна стойност беше приета средната стойност от интервала $t_{min} \div t_{max}$ при правоъгълно разпределение.

Размерът “*b*” беше измерен с микрометър с обхват 25-50mm и е приета същата неопределеност. Тъй като образецът представлява калибър за дължина, размерът „*L*“ не беше измерван, но беше приета неопределеност ±0.05mm на стандартен шублер, какъвто се използва по принцип за измерването на такива размери.

Масата на образца е измерена с помоща на лабораторна везна с точност ±0.001g

Измерените стойности на входните величини и пресметнатите по итерационна процедура модули на еластичност и коефициент на Поасон са показани в табл.1., а пресмятането на неопределеността в табл. 2,3,4.

За да се елиминира евентуална систематична грешка, при определяне на собствената честота, от използвания измервателен микрофон, е проведен вътрешно лабораторен експеримент, като използвания електретен микрофон, включен към звуковата карта на персонален компютър, е заменен с кондензаторен микрофон на фирмата Briel & Кјаег, включен към 16 битов АЦП модул. Отклонението на измерените честоти е в рамките на ±2Hz. Въпреки това е възприета оценката на неопределеността при измерването на честотата цитирана в [7,8].

Табл.1 Измерени стойности на входните величини и пресметнати E,G, ν

Параметър	Стойност
<i>m</i> [g]	219.256
<i>b</i> [mm]	34.98
<i>L</i> [mm]	90
<i>t</i> [mm]	8.977
<i>f_f</i> [Hz]	5646

<i>f_f</i> [Hz]	8138
<i>T₁</i>	1.071
<i>R</i>	4.71
<i>E</i> [GPa] (1)	204.06
<i>G</i> [GPa] (2)	78.42
<i>ν</i> (3)	0.301

Табл. 2 Пресмятане на стандартната неопределеност при определяне на модула на Юнг “E”.

Параметър	Стандартна неопределеност	Коеф. На чувств.	Принос към U _c (E), ±GPa
<i>x_i</i>	<i>u</i> (<i>x_i</i>)	<i>c_i</i>	
<i>m</i> = 219,256g	$\pm \frac{0.01}{\sqrt{3}}$	1	0.005
<i>b</i> = 34.98mm	$\pm \frac{0.01}{\sqrt{3}}$	1	0.034
<i>L</i> = 90mm	$\pm \frac{0.05}{\sqrt{3}}$	3	0.196
<i>t</i> = 8.977mm	$\pm \frac{0.01}{\sqrt{3}}$	3	0.394
<i>f_f</i> = 5646Hz	$\pm \frac{17}{\sqrt{3}}$	2	0.410
E= 204.06GPa			
Комбинирана стандартна неопределеност		U_c(E) =	0.60
Разширена стандартна неопределеност (k=2)		U=	1.20 (0.59%)

Табл. 3 Пресмятане на стандартната неопределеност при определяне на модула на сръзване “G”.

Параметър	Стандартна неопределеност	Коеф. На чувств.	Принос към U _c (G), ±GPa
<i>x_i</i>	<i>u</i> (<i>x_i</i>)	<i>c_i</i>	
<i>m</i> = 219,256g	$\pm \frac{0.01}{\sqrt{3}}$	1	0.005
<i>b</i> = 34.98mm	$\pm \frac{0.01}{\sqrt{3}}$	1	0.034
<i>L</i> = 90mm	$\pm \frac{0.05}{\sqrt{3}}$	1	0.065
<i>t</i> = 8.977mm	$\pm \frac{0.01}{\sqrt{3}}$	1	0.131
<i>f_f</i> = 8138Hz	$\pm \frac{24}{\sqrt{3}}$	2	0.408
G= 78.42GPa			
Комбинирана стандартна неопределеност		U_c(G) =	0.44
Разширена стандартна неопределеност (k=2)		U=	0.88 (1.12%)

Окончателно при коефициент на разширение $\kappa=2$ (95%) получаваме:

$$E = 204.1 \pm 1.2 \text{ GPa}, \quad G = 78.42 \pm 0.88 \text{ GPa} \\ \nu = 0.301 \pm 0.004$$

Табл. 4 Пресмятане на стандартната неопределеност на коефициента на Поасон “ ν ”.

Параметър	Стандартна неопределеност	Коеф. На чувств.	Принос към $U_c(\nu)$, \pm
x_i	$u(x_i)$	c_i	\pm
$E=204,06 \text{ GPa}$	± 0.6	1	0.0009
$G=78.42 \text{ GPa}$	± 0.44	1	0.0017
$\nu=0.3011$			
Комбинирана стандартна неопределеност		$U_c(\nu)=$	0.0019
Разширена стандартна неопределеност ($k=2$)		$U=$	0.0036 (1.2%)

3.Изводи

В настоящото изследване е направена оценка на неопределеността при пресмятането на еластичните параметри E , G , ν , чрез импулсно резонансен метод съгласно ASTM E1876 – 09. Вижда се (табл.2,3,4), че чрез използването на тази методика, неопределеността при пресмятането на модулът E е под $\pm 1\%$, а на модулът G и коефициента на Поасон ν около $\pm 1,2\%$.

Освен честотите f_f , f_t , най-съществен принос имат неопределеността при измерване на размерите “ t ” и “ L ”. За да се намали влиянието им трябва да се избягват прекалено „тънки“ образци, а дължината да е възможно по-голяма.

Литература:

- [1] Radovic M., et al., Comparison of different experimental techniques for determination of elastic properties of solids. Materials Science and Engineering, 2004, 368, p 56-70
- [2] Ricardo Branco, Jose D. Costa and Fernando V. Antunes, Influence of Errors in Young’s Modulus on Fatigue Life Predictions of Notched Round Bars Under Bending-Torsion Loading, Recent Patents on Mechanical Engineering, Volume 7, Issue 1, 2014, Pages 63-76

- [3] Daniel Peixoto, Carlos Sousa, Teresa Restivo, Álvaro Ribeiro, José Rodrigues, YOUNG’S MODULUS DETERMINATION: DIFFERENT METHODS AND ASSOCIATED UNCERTAINTIES, Proceedings of ICEM15, Porto/Portugal, 22-27 July 2012
- [4] E.I. Mashinsky, DIFFERENCES BETWEEN STATIC AND DYNAMIC ELASTIC MODULI OF ROCKS: PHYSICAL CAUSES, Russian Geology and Geophysics Vol. 44, No. 9, pp. 953-959, 2003
- [5] TOMAS PLACHY, PAVEL PADEVET, MICHAL POLAK, Comparison of Two Experimental Techniques for Determination of Young’s Modulus of Concrete Specimens, RECENT ADVANCES in APPLIED and THEORETICAL MECHANICS, 2009, pp 68-71, ISSN: 1790-2769
- [6] G. Straffelini, V. Fontanari, L. Brandusan, A. Molinari, "Elastic behaviour and first yielding in pm steels", 1998. Proceedings of: 1998 Powder Metallurgy World Congress & Exhibition, Granada (Spain), October 18-22 1998
- [7] ASTM E1876 - 09 Standard Test Method for Dynamic Young's Modulus, Shear Modulus, and Poisson's Ratio by Impulse Excitation of Vibration

- [8] ASTM E1875 - 13 Standard Test Method for Dynamic Young's Modulus, Shear Modulus, and Poisson's Ratio by Sonic Resonance
- [9] C. K. Bullough, The Determination of Uncertainties in Dynamic Young’s Modulus UNCERT COP 13: 2000

За контакти:

9010 Варна, ул. “Студентска”1
Технически университет –Варна,
Катедра Техническа Механика

Гл. ас.д-р Диян Минков Димитров
e-mail: dm_dimitrov@tu-varna.bg