МОДИФИЦИРАН ПОДХОД ЗА ОЦЕНКА НА ПАРАМЕТРИТЕ НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕТО НА ВЕЙБУЛ ПРИ ИЗПИТВАНИЯ С НУЛА ИЛИ ЕДИНИЧНИ ОТКАЗИ И ИНТЕРВАЛНИ ДАННИ

Тончо Папанчев

Abstract: *This report examines the problems arising in the evaluation of Weibull distribution parameters for interval data and zero or few failures . A modified approach is proposed combining inherently principles of the method "Weibayes" and the mathematical formalism of the method of maximum likelihood for interval data. Simulation studies have been performed, resulting in a comparative analysis of the presented modified approach and method "Weibayes" regarding the accuracy of the obtained results.*

Keywords: *interval data, parametric evaluation, reliability, Weibull distribution*

I. Въведение

Изследванията, извършвани по отношение на надеждността на електронните изделия, се основават на данни за вида и броя на регистрираните откази в рамките на даден период на проследяване на работата на изделията. Два от проблемите, водещи до понижаване на точността на получаваните оценки на изследваните надеждностни параметри, са: първо, трудностите, свързани с точното отчитане на моментите на възникване на отказите, и второ, възможната липса или малък брой регистрирани откази. Когато не е известен точния момент на възникване на отказите, данните се обобщават в групи и представляват ограничени (цензурирани) и интервални (групирани) данни. Такива са данните, събрани при извършване на изпитвания с последователни периодични проверки, при планови профилактични дейности или от гаранционно (извънгаранционно) обслужване. Липсата или минималният брой на регистрирани откази са обусловени от ограничения период на изпитвания, от една страна, и непрекъснатото нарастване на надеждността на електронните изделия и системи, от друга. Горните два проблема водят до затруднения при прилагането на обичайните методи за оценка на параметрите на закона за разпределение и получаванети на резултати с голяма степен на неопределеност.

При изследването на надеждността на електронни елементи и изделия, основен избор на закон на разпределение е закона на Вейбул. Причините за това са няколко: а) той се използва при описването на разпределенията на случайните величини “време за безотказна работа”, “време на живот”, представляващи най-голям интерес при надеждностното проектиране [1,2]; б) чрез него могат да се изразят други основни закони на разпределение на времената на отказите, като експоненциалния закон и закона на Релей [1,2,3,4]; в) законът дава възможност да се анализират и отграничат трите основни периоди в живота на електронните изделия – ранни откази, нормална експлоатация и стареене; г) дава възможност за достоверно моделиране дори при непълни данни – ограничени (цензурирани) или интервални (групирани). Уравнения (1) и (2) представляват двете основни характеристики на разпределението на Вейбул – вероятностната плътност на разпределението и интегралния закон на разпределение:

$$f(t)=\beta\cdot\frac{t^{\beta-1}}{\alpha^{\beta}}\cdot e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}} ; \qquad (1)$$

$$F(t)=1-e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}} , \qquad (2)$$

където α и β са параметри на разпределението, с физически смисъл на α като “характеристичен параметър” - 63,2-ия персентил на разпределението, измерван във времева или друга мерна единица, определяща количеството изразходван технически ресурс. Параметърът β задава формата на кривата на плътността на разпределението, което и определя наименованието на параметъра, а именно “параметър на формата”, и е безразмерна величина.

В настоящата статия е извършен сравнителен анализ на метода „Вейбейс“ и на предложен от автора модифициран подход за оценка на параметрите на разпределението на Вейбул при изпитвания с периодични проверки и нула или ограничен брой откази. За целта са проведени симулационни изпитвания, данните от които са използвани за оценяване на точността на получаваните по двата начина надеждностни параметри. Направени са изводи, обобщаващи резултатите от извършения сравнителен анализ. Представен е начин за оценка на надеждностните параметри при ускорени изпитвания с няколко степени на натоварване, при който част от резултатите се приемат като „априорни“ данни и се използват в оценката на надеждностните параметри при изпитванията с нула откази.

II. Оценка на параметрите на разпределението на Вейбул за интервални данни при нула или единични откази по метода „вейбейс“

Методите, които се изпозват най-често в регресионния анализ на данни от надеждностни изпитвания, са методът на линейното преобразуване Median Rank Regression (MRR), представляващ оценка по метода на най-малките квадрати, и методът на максималното правдоподобие Maximum Likelyhood (ML). При интервални данни единствено ML дава възможност за оценка на параметрите на разпределението на Вейбул [5], без да е необходимо да се извършва някакво преобразуване на данните. Използването на горните методи е невъзможно при нула откази, и с голяма неопределеност при регистрирани единични откази.

Повишаването на точността на получаваните параметрични оценки се постига чрез метод, при който се използват априорни данни, като исторически данни, инженерен опит, познания за естеството на отказите, за формиране на обосновано предположение за стойността на параметъра на формата β. Методът е наречен „Вейбейс” (Weibayes), и представлява подход за оценка на характеристичното време α на разпределението на Вейбул при липса на регистрирани откази, или наличие на един или два отказа. В [6,7] е представен математическият израз за изчисляване на α:

$$\hat{\alpha} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{\beta}} + \left(n - r \right).T^{\hat{\beta}}}{r} \right]^{\frac{1}{\hat{\beta}}}, \qquad (3)$$

където r е броят регистрирани откази, n е общият брой изпитвани изделия, T е продължителността на изпитванията, а ti е времето до отказ на i-тия елемент, i=1÷r. Получената стойност $\hat{\alpha}$ представлява оценка на истинското характеристично време α, получена по метода ML.

При липса на откази се приема граничната хипотеза за възникване на един отказ в момента след приключване на изпитванията, или r=1. Тогава оценката придобива вида [6,7]:

$$\hat{\alpha} = \left[\frac{n.T^{\hat{\beta}}}{r} \right]^{\frac{1}{\hat{\beta}}}, \qquad (4)$$

и представлява левия край на едностранен доверителен интервал с вероятност 63.2%. В разработената за симулационните изследвания изчислителна процедура е заложена стойност на r=2.3, с което се повишава до 90% вероятността истинската стойност на параметъра α да се намира отдясно на получената по този начин оценка. Изследвани са резултатите при използването метода „Вейбейс“ за 0 до 3 регистрирани откази, след преобразуване на данните за времената на възникване на отказите от интервални към точни стойности с разполагане в средата на интервала, при един отказ, или равномерно разпределяне в интервала, ако са повече от един.

III. МОДИФИЦИРАН ПОДХОД “ИНТЕРВАЛЕН ВЕЙБЕЙС”

В областта на малките извадки и малък брой откази – от 0 до 7, за интервални данни, е предложен и изследван следният подход, комбиниращ идеите на стандартния метод „Вейбейс“ и метода на максималното правдо-подобие (ML) за интервални данни. Стойността на параметъра на формата β се приема за известна, а оценката на характеристичното време α се получава чрез функцията на правдоподобие от метода ML .

Логаритмичната форма на функцията на правдоподобие £(t|α,β) при ML и интервални данни е от вида [8]:

$$£(t\,|\,\alpha,\beta)=\ln\left(L(t\,|\,\alpha,\beta)\right)=n_1.\ln\left[1-e^{-\left(\frac{t_{1H}}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]+r.\ln\left[e^{-\left(\frac{t_{k+1L}}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]+\sum_{i=2}^{k}n_i.\ln\left[e^{-\left(\frac{t_{iL}}{\alpha}\right)^{\beta}}-e^{-\left(\frac{t_{iH}}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]$$

, (5)

където ni е броят регистрирани откази в i-тия интервал, с начало tiL и край tiH, i=1÷k; k е броят на интервалите на отчитане, а k+1 представя отворения отдясно интервал след края на изпитванията [tk+1L,+∞); r е броят неотказали изделия след края на изпитванията.

След съставяне на частните диференциални уравнения на £(t|α,β) по α и β, и приравнявайки десните части на уравненията на нула, е съставена система от две уравнения, която, след извършване на някои опростявания и преобразувания, придобива формата [8]:

$$\left|\begin{array}{l}\varphi_1=n_1.\dfrac{t_{1H}^{\beta}}{B_1-1}-\sum\limits_{i=2}^{k+1}n_i t_{iL}^{\beta}+\sum\limits_{i=2}^{k}n_i.\dfrac{t_{iH}^{\beta}-t_{iL}^{\beta}}{A_i-1}=0\\ \varphi_2=n_1.\dfrac{t_{1H}^{\beta}.\ln\left(\dfrac{t_{1H}}{\alpha}\right)}{B-1}-\sum\limits_{i=2}^{k+1}n_i.t_{iL}^{\beta}.\ln\left(\dfrac{t_{iL}}{\alpha}\right)+\sum\limits_{i=2}^{k}n_i.\dfrac{C_i}{A_i-1}=0\end{array}\right.$$

, nk+1=r. (6)

Приемайки β за дадено, след събиране на двете уравнения, се получава уравнение с едно неизвестно – харакактеристичното време α:

$$\varphi_1+\varphi_2=\frac{n_1.t_{1H}^{\beta}}{B_1-1}.\left(1+\ln\left(\frac{t_{1H}}{\alpha}\right)\right)-\sum_{i=2}^{k+1}n_i t_{iL}^{\beta}.\left(1+\ln\left(\frac{t_{iL}}{\alpha}\right)\right)+\sum_{i=2}^{k}\frac{n_i}{A_i-1}.\left(t_{iH}^{\beta}-t_{iL}^{\beta}+C_i\right)=0$$

, (7)

където

$$A_i=\exp\left(\left(\frac{t_{iH}}{\alpha}\right)^{\beta}-\left(\frac{t_{iL}}{\alpha}\right)^{\beta}\right),$$

$$B_1=\exp\left(\left(\frac{t_{1H}}{\alpha}\right)^{\beta}\right),$$

$$C_i=\left[t_{iH}^{\beta}.\ln\left(\frac{t_{iH}}{\alpha}\right)-t_{iL}^{\beta}.\ln\left(\frac{t_{iL}}{\alpha}\right)\right].$$

Решаването на уравнението може да се извърши по метода на Нютон-Рафсън [9], след намиране на производната на уравнението по α:

$$\frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial\alpha}=\frac{n_1.t_{1H}^{\beta}}{\alpha.(B_1-1)}.\left(\frac{\left(1+\ln\left(\frac{t_{1H}}{\alpha}\right)\right).\beta.\left(\frac{t_{1H}}{\alpha}\right)^{\beta}.B_1}{B_1-1}-1\right)+\sum_{i=2}^{k+1}\frac{n_i.t_{iL}^{\beta}}{\alpha}+$$

$$+\sum_{i=2}^{k}\frac{n_i.\left(t_{iH}^{\beta}-t_{iL}^{\beta}\right)}{\alpha.(A_i-1)}.\left(\frac{\left(t_{iH}^{\beta}-t_{iL}^{\beta}+C_i\right).\beta.A_i}{\alpha^{\beta}.(A_i-1)}+1\right)$$

. (8)

Когато липсва регистриран отказ за целия период на изпитванията, по аналогия с метода „Вейбейс“, изчисленията се извършват след приемането на граничната възможност “възникване на един отказ в последния интервал на изпитванията“. Условно този подход е наречен “Интервален Вейбейс”.

IV. ПРИЛОЖЕНИЕ НА МЕТОДА “ВЕЙБЕЙС” И МОДИФИЦИРАНИЯ ПОДХОД “ИНТЕРВАЛЕН ВЕЙБЕЙС” ПРИ СИМУЛАЦИОННИ ДАННИ.

За целта на Вейбуловия надеждностен анализ, е приложен използвания в [8] пакет от изчислителни модули в среда на MATLAB, който позволява генерирането на псевдослучайни реализации по закона на Вейбул от типа точни, ограничени отдясно или интервални, подготовка на данните за представянето им в графичен вид, получаване на параметрични оценки на параметрите на надеждностното разпределение по няколко метода и допълнителна статистическа информация. С негова помощ са изследвани методът “Вейбейс” и модифицираният подход “Интервален Вейбейс” при работа с интервални данни с регистрирани нула до 7 откази. Средноаритметичната стойност на оценката на β , изчислена по метода ML за интервални данни [8], е приета за предварително известната стойност на параметъра β.

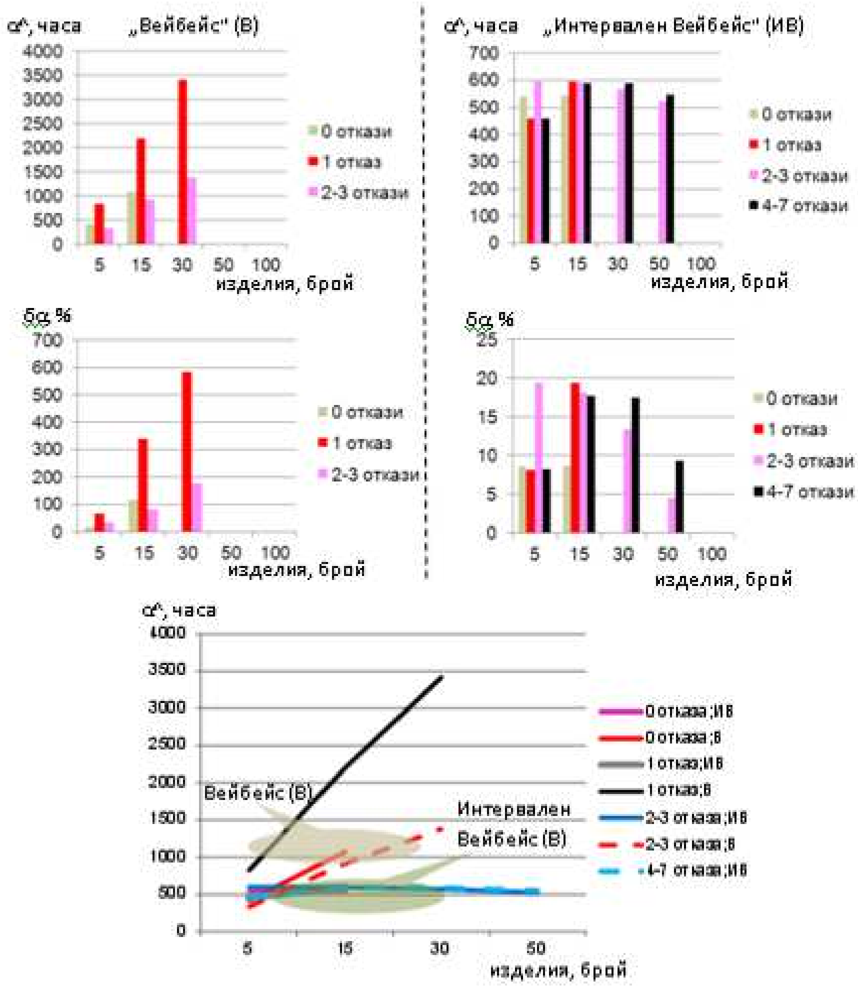
С цел опростяване на изчислителните процедури и ограничаване обема на изходните резултати, симулационните изследвания са проведени при следните ограничения: а) всички изделия от една извадка започват изпитванията си в един и същ момент; б) всички изделия са работоспособни в началото на изпитванията; в) известни са моментите на проверка за възникване на откази и те са в сила за всички изделия от извадката; г) данните са от типа „интервални“ или „ограничени отдясно“, като вторите се отнасят само за изделията, които са останали работоспособни след приключване на изпитванията. Въведените ограничения не оказват съществено влияние върху получаваните резултати и направените на тяхна база изводи.

Параметрите на генерираните псевдослучайни реализации са представени в таблица 1.

Таблица 1. Изходни параметри на псевдослучайните реализации.

Серия №		1					2					3					4				
Брой изделия в един тест	m	5	15	30	50	100	5	15	30	50	100	5	15	30	50	100	5	15	30	50	100
Брой реализации, хиляди	n	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Параметри на закона на Вейбул	α	500					500					1000					1000				
	β	1.2					3					2					5				
Продължителност на изпитванията, часа	T	200										500									
Брой интервали	i	5					5					10					10				

Резултатите за получените оценки на характеристичното време α за първата серия симулационни данни са представени на фигура 2. Изследванията са съсредоточени в симулациите с брой изделия до 50, тъй като за 100 изделия са регистрирани повече от 7 отказа в едно изпитване.



Фиг.2. Оценка на α по двата начина при начални параметри на симулационните реализации: α=500 часа. β=1.2; T=200 часа; i=5 интервала

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

След анализ на получените резултати при прилагането на изследваните начини за оценка на параметрите на разпределението на Вейбул при интервални данни и липса или малък брой регистрирани откази, могат да бъдат формулирани следните изводи:

Методът “Вейбейс” при 0, 1 и 2 отказа е чувствителен към параметрите продължителност на изпитванията T, големина на β и обема на извадката. Затова резултатите могат да се различават значително от истинската стойност на характеристичното време α.

При прилагането на подхода “Интервален Вейбейс”, в голяма част от случаите се получиха оценки, близки до истинските стойности на параметрите, независимо от обема на извадката, броя откази, продължителността на изпитванията, стойността на параметрите на разпределението. От 65% до 98% от резултатите са в границите на 20% от точната стойност на α. Особено голяма е разликата с метода ”Вейбейс” при симулационните резултати за извадки с малък обем и изпитвания с кратък срок, малък брой интервали и $\beta \leq 1{,}5$. При симулативните резултати с параметри $\{\alpha=1000, \beta=5\}$ получихме сходни резултати по двата варианта.

Така посочените изводи дават основание за използването на модифицирания подход при работа с интервални данни, когато регистрираните откази са малък брой или липсват такива, при условие, че обосновано може да се приеме достоверна стойност за параметъра на формата β.

По своята същност ускорените изпитвания предполагат получаването на резултати с различен брой откази, в зависимост от степента на приложеното натоварване. Авторът предлага използването на различни начини на оценка на параметрите на разпределенията за отделните тестове. Първоначалното допускане за постоянна стойност на β [5] дава възможност да се процедира по следния начин: от тестовете с по-голям брой откази по метода ML се изчисляват стойностите на оценките $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$. Така получената стойност на β се използва с подхода “Интервален Вейбейс” за оценяване на параметъра α при тестовете, завършили без отказ, или с единични откази. По този начин част от тестовете играят ролята на априорна информация, повишаващи точността на резултатите от изпитванията с по-ниска степен на натоварване. Като бъдещ резултат може да се посочи възможността за ограничаване на броя на тестовете и облекчени условия на натоварване при изпълняването им, при запазване на скъсения период на изпитване, характерен за ускорените изпитвания.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Е. Гиндев, Увод в теорията и практиката на надеждността. Част 1. Основи на приложната надеждност, Академично издателство “Проф. Марин Дринов”, София, България 2000

[2] Х. Христов, В. Трифонов, Надеждност и сигурност в комуникациите, Издателство “Нови знания”, София, България 2005

[3] Ямпурин Н., А. Баранова, Основы надежности электронных средств, Изд. Център “Академия”, Москва, 2010, ISBN 978-5-7605-5908-2

[4] Rinne H., The Weibull Distribution A Handbook, CRC Press, USA, 2010, ISBN 978-1-4200-8743-7.

[5] Wayne Nelson, Accelerating Testing, Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis, New Jersey, John Wiley and Sons, Inc., 1990

[6] Abernethy R., The New Weibull Handbook, 4th edition, Florida, USA, 2000, ISBN 0-9653062-1-6

[7] IEC 61649 Ed. 2.0: Weibull Analysis, UK, 2008

[8] Папанчев Т., А. Георгиев, Г.Тодоринов, Анализ на методи за оценка на параметрите на разпределение на Вейбул при интервални данни, Електронно списание “Компютърни науки и комуникации”, том 2,брой 4/2013, изд. БСУ, Бургас, http://ojs.bfu.bg/index.php/knk, ISSN: 1314-7846

[9] Chapra S., Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists, 3rd Edition, McGraw-Hill, NY, USA, 2012, ISBN 978-0-07-340110-2

За контакти:

ТУ-Варна , ул. Студентска № 1, 208РСС
инж. Тончо Папанчев,
асистент в Катедра ”Електронна техника и миокроелектроника”
e-mail: t.papanchev@tu-varna.bg