Two-Dimensional Problem for Using the Resources with Inconstant Expense Rates

Prof. Dr. Rosen Nikolaev
University of Economics - Varna, Varna, Bulgaria
nikolaev_rosen@ue-varna.bg

Assoc. Prof. Dr. Tanka Milkova
University of Economics - Varna, Varna, Bulgaria
tankamilkova@ue-varna.bg

Abstract

The model of using the resources optimally is a well-known one in the theory of linear optimization. It provides an opportunity for determining an optimal production plan for a certain number of products based on given cost rates of each resource to produce one unit of each product, given stock quantities of raw materials used and given prices of the final products. In the present paper an opportunity to determine the optimal production plan is revealed if some of the cost rates are not fixed but depend on a parameter. The methods of parametric linear optimization are used, demonstrating options to apply the graphical method for solving a two-dimensional problem for using the resources.

Keywords: Linear Programming, Optimization, Parametric Linear Programming

JEL Code: C610

Въведение

Оптимизирането на използваните ресурси във всяка една стопанска дейност е основна задача за всеки рационално действащ субект. Едни от най-ефектовните подходи за вземане на оптимизационни решения се явяват методите на икономико-математическото моделиране и в частност на линейното оптимиране. В теорията на линейното оптимиране е добре известен моделът за оптимално използване на ресурсите (Атанасов и др., 2010; Атанасов и др., 2014; Атанасов и Милкова, 2011). Този модел е силно застъпен в научни и приложни разработки в случаите когато са фиксирани всички коефициенти в него (в целевата функция и в ограничителните условия). Няй-общо може да се каже, че чрез моделът за оптимално използванеа на ресурси се огигурява възможност за определяне на оптимлен план на производство на определен брой продукти на база известни разходни норми от всеки ресурс за производство на единица от всеки продукт, известни наличности от използваните суровини и известни цени на готовите продукти. Също така са теоретично разработени и някои случаи, при които коефициентите в целевата функция и свободните коефициенти в ограничителните условия зависят от параметър. Те са обект на изучаване от параметричното линейно оптимиране.

Целта на авторите в настоящата разработка е, като се позовават на методите на параметричното линейно оптимиране и в частност на графичния метод, да изследват една възможност за определяне на оптимален производствен план при положение, че някои от разходните норми не са фиксирани, а зависят от параметър.

Този модел може да се прилага при производство на допълващи се готови продукти, когато от даден ресурс, който се използва за тяхното производство, разходните норми могат да се изменят в някакви интервали, т.е. разходните норми от този ресурс за някои готови продукти могат да се завишават, а за други да се намаляват.

Модел за оптимално разпределение на ресурси

Постановката на модела за оптимално разпределение на ресурси се свежда до следното (Атанасов и др., 2014; Атанасов и Милкова, 2011; Гончаренко и др., 2013):

За производството на n вида продукти P_1, P_2, … , P_n се използват m вида ресурси: S_1,

S_2, … , S_m.

Въвеждат се означенията: x_j - търсен обем от продукт от вида P_j $(j=1\div n)$; b_i - наличност от ресурс S_i $(i=1\div m)$; a_{ij} - необходими количества (разходни норми) от ресурс S_i за производството на единица продукт от вида P_j (величините a_{ij} могат да се разглеждат като технологични коефициенти); c_j - печалба от реализацията на единица продукт от вида P_j.

Тъй като c_j е печалбата от единица продукт P_j, то x_j единици от него носят $c_j x_j$ единици печалба. Сумарната печалба от реализацията на всички видове продукти (означена със Z) ще бъде равна на:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n .$$

Очевидно разходът на ресурса S_i за производството на x_j единици от продукта P_j е равен на $a_{ij}x_j$. Тогава общият разход на този ресурс за производството на съответните единици от всички видове продукти е равен на $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n$. Той не трябва да превишава наличния обем b_i. Получава се система от неравенства относно неизвестните величини x_j:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m. \end{array}$$

За да бъде планът на производство реален, е необходимо да се наложи условие за неотрицателност на неизвестните величини, т.е. $x_j \ge 0$ $(j=1\div n)$.

Постановката на задачата е да се състави такъв план за производство на продуктите, при който обюата печалба от тяхната реализация да бъде максимална.

По такъв начин моделът на задачата за използване на ресурси ще приеме вида:

$$\max : Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j ,$$

при ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i=1\div m);$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=1\div n).$$

В настоящата разработка ще се спрем на двумерния случай на задачата за разпределение на ресурси, т.е. когато се произвеждат точно два продукта. Както е известно този модел може да бъде решен с помощта на графичен метод.

Пример на двумерна задача за използване на ресурсите с разходни норми, зависещи от параметър

Както вече беше споменато, в литературата са известни параметрични методи на линейното оптимиране, където параметърът е в целевата функция и/или в десните страни на ограничителните условия (Атанасов и др., 2010; Атанасов и др., 2014; Атанасов и Милкова, 2011). В някои литературни източници са представени и случаи, при които параметърът е в един от стълбовете в ограничителните условия (Бонев и др., 1989; Вильямс, 1976). Тук ще бъде разгледана възможността за определяне на оптимално решение на задачата на линейното оптимиране с параметър в едно от ограничителните условия.

Разглеждаме следния пример:

$Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

$l_1: \quad 6tx_1 + 5(5-t)x_2 \le 30$

$l_2: \quad 5x_1 + 2x_2 \le 10$

$l_3: \quad x_1 + 4x_2 \le 4$

$l_4: \quad x_1 \ge 0$

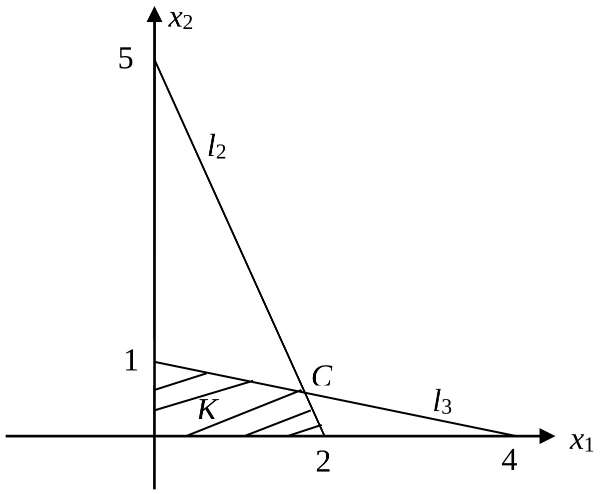
$l_5: \quad x_2 \ge 0$

$t \in [2,4]$

Икономическият смисъл на този модел се свежда до следното: трябва да се определят количествата x_1 и x_2 от два допълващи се продукта. За производството им се използват три вида суровини. За първата суровина е сила, че ако се завиши разходната норма за производството на първия продукт, то тогава трябва да се занижи разходната норма за производството на втория продукт, както и обратното.

Решение:

Множеството *K* определено от l_2, l_3, l_4 и l_5 е показано на фиг. 1.



Фигура 1. Множество *K* определено от l_2, l_3, l_4 и l_5.

Нека правата $l_2 \cap l_3$ в т. С:

$$\left| \begin{array}{l} 5x_1 + 2x_2 = 10 \\ x_1 + 4x_2 = 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 5(4-4x_2) + 2x_2 = 10 \\ x_1 = 4 - 4x_2 \end{array} \right. \Rightarrow 18x_2 = 10$$

$\Rightarrow x_2 = \dfrac{5}{9}$. Следователно $x_1 = 4 - 4.\dfrac{5}{9} = \dfrac{16}{9}$. Следователно т. $C\left(\dfrac{16}{9}; \dfrac{5}{9}\right)$.

$$l_1: \quad \frac{x_1}{\frac{5}{t}} + \frac{x_2}{\frac{6}{5-t}} \le 1$$

Правата l_1 пресича *Ox* в точка $A\left(\dfrac{5}{t}; 0\right)$ и *Oy* в точка $B\left(0; \dfrac{6}{5-t}\right)$ и $x_A \in \left[\dfrac{5}{4}; \dfrac{5}{2}\right]$, $y_B \in [2;6]$.

$l_1 \cap l_2$ в т. D: $\left| \begin{array}{l} x_2 = \dfrac{6}{5-t} - \dfrac{6t}{5(5-t)} x_1 \\ x_2 = 5 - \dfrac{5}{2} x_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \dfrac{6}{5-t} - \dfrac{6t}{5(5-t)} x_1 = 5 - \dfrac{5}{2} x_1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{50t-190}{37t-125}$

$\Rightarrow x_2 = 5 - \dfrac{5}{2} . \dfrac{50t-190}{37t-125} = \dfrac{60t-150}{37t-125}$. Следователно $D\left(\dfrac{50t-190}{37t-125}; \dfrac{60t-150}{37t-125} \right)$.

$l_1 \cap l_3$ в т. E: $\left| \begin{array}{l} x_2 = \dfrac{6}{5-t} - \dfrac{6t}{5(5-t)} x_1 \\ x_2 = 1 - \dfrac{1}{4} x_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \dfrac{6}{5-t} - \dfrac{6t}{5(5-t)} x_1 = 1 - \dfrac{1}{4} x_1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{20t+20}{29t-25}$

$\Rightarrow x_2 = 1 - \dfrac{1}{4} . \dfrac{20t+20}{29t-25} = \dfrac{24t-30}{29t-25}$. Следователно $E\left(\dfrac{20t+20}{29t-25}; \dfrac{24t-30}{29t-25} \right)$.

Ще изследваме кога точките *A*, *B*, *D* и *E* попадат по границата на множеството *K*:
1) Точка *A* спрямо точка (2;0).
2) Точка *B* спрямо точка (0;1).
3) Точка *D* спрямо точка *C*.
4) Точка *E* спрямо точка *C*.

Следва да се отбележи, че всички изследвания се правят в първи квадрант.

1) Точка $A\left(\dfrac{5}{t}; 0 \right)$ спрямо точка (2;0).

$\dfrac{5}{t} \le 2 \Rightarrow A \in K \Rightarrow t \ge \dfrac{5}{2}$ или: за $t \in \left[2; \dfrac{5}{2} \right]$, $A \notin K$; за $t \in \left[\dfrac{5}{2}; 4 \right]$, $A \in K$.

2) Точка $B\left(0; \dfrac{6}{5-t} \right)$ спрямо точка (0;1).

$\dfrac{6}{5-t} \le 1 \Rightarrow B \in K \Rightarrow 6 \le 5 - t \Rightarrow t \le -1 \Rightarrow$ за $t \in [2; 4]$, $B \notin K$.

3) Точка $D\left(\dfrac{50t-190}{37t-125}; \dfrac{60t-150}{37t-125} \right)$ спрямо точка $C\left(\dfrac{16}{9}; \dfrac{5}{9} \right)$.

За $\dfrac{16}{9} \le \dfrac{50t-190}{37t-125} \le 2$, $D \in K$.

3.1) Ако $t = \dfrac{125}{37}$, то $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow$ т. *D* не съществува. (1)

3.2) Ако $t \in \left[2; \dfrac{125}{37} \right)$ $\left(\dfrac{125}{37} \approx 3,37 \right)$ следва, че знаменателят е отрицателен. (2)

Тогава $D \in K$, ако $16(37t-125) \ge 9(50t-190) \ge 18(37t-125) \Rightarrow$

$\left| \begin{array}{l} 142t \ge 290 \\ 216t \le 540 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} t \ge \dfrac{145}{71} \\ t \le \dfrac{5}{2} \end{array} \right.$ и от (2) следва, че за $t \in \left[\dfrac{145}{71}; \dfrac{5}{2} \right]$, $D \in K$.

3.3) Ако $t \in \left(\frac{125}{37}; 4 \right]$ знаменателят е положителен, то тогава

$$16(37t - 125) \le 9(50t - 190) \le 18(37t - 125) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} t \le \dfrac{145}{71} \\ t \ge \dfrac{5}{2} \end{array} \right.$$, което няма решение.

Следователно окончателно за 3) получаваме: за $t \in \left[\frac{145}{71}; \frac{5}{2} \right]$, $D \in K$; за $t \in \left[2; \frac{145}{71} \right] \cup \left[\frac{5}{2}; 4 \right]$ точка *D* не принадлежи на *K*.

4) Точка $E\left(\frac{20t+20}{29t-25}; \frac{24t-30}{29t-25} \right)$ спрямо точка $C\left(\frac{16}{9}; \frac{5}{9} \right)$.

Точка *E* принадлежи на множеството *K*, ако $\frac{20t+20}{29t-25} \le \frac{16}{9}$. Следователно

$180t + 180 \le 464t - 400 \Rightarrow t \ge \frac{145}{71}$ $\left(\frac{145}{71} \approx 2,04 \right)$.

Следователно: за $t \in \left[\frac{145}{71}; 4 \right]$ точка *E* принадлежи на множеството *K*; за $t \in \left[2; \frac{145}{71} \right]$ точка *E* не принадлежи на множеството *K*.

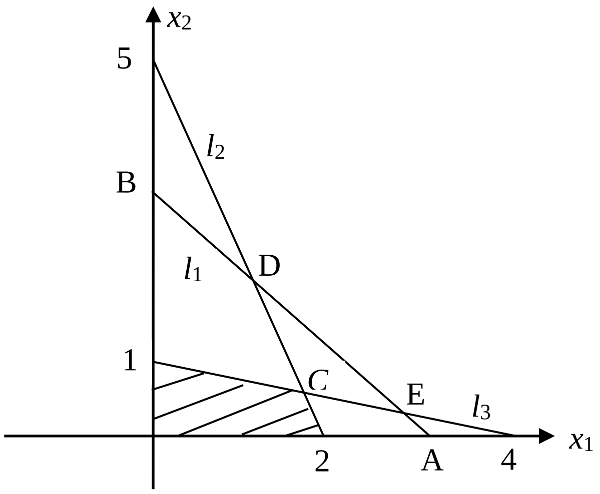
В следващата табл. 1 е обобщена принадлежността на точките *A*, *B*, *D* и *E* на множеството *K* в зависимост от параметъра *t*, като „Да“ означава, че точката принадлежи, а „Не“ означава, че точката не принадлежи на множеството *K*.

Таблица 1. Принадлежност на точките *A*, *B*, *D* и *E* на множеството *K* в зависимост от параметъра *t*

t	$\left[2; \frac{145}{71} \right]$	$\left[\frac{145}{71}; \frac{5}{2} \right]$	$\left[\frac{5}{2}; 4 \right]$
A	Не	Не	Да
B	Не	Не	Не
D	Не	Да	Не
E	Не	Да	Да
	Първи случай вж. фиг. 2	Втори случай вж. фиг. 3	Трети случай вж. фиг. 4

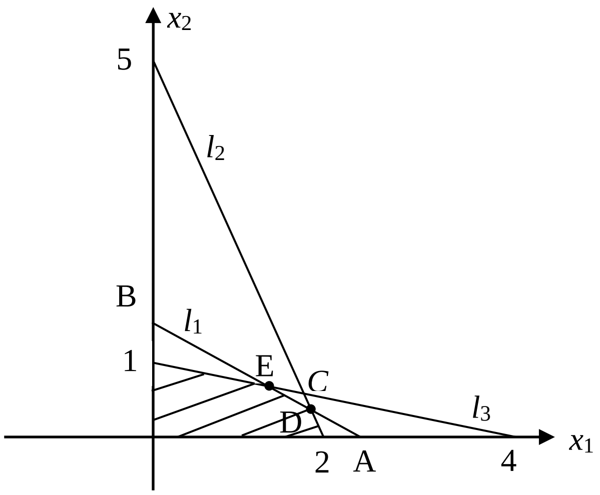
Първи случай.

В този случай допустимото множество от стойности съвпада с досегашното множество *K*. Тогава $Z(0;0) = 0$, $Z(2;0) = 2$, $Z(0;1) = 2$, $Z\left(\frac{16}{9}; \frac{5}{9} \right) = \frac{16}{9} + \frac{10}{9} = \frac{26}{9} > 2$, следователно за $t \in \left[2; \frac{145}{71} \right]$, $Z_{\max} = \frac{26}{9}$.



Фигура 2. Допустимо множество K за $t \in \left[2; \frac{145}{71}\right]$.

Втори случай.
Допустимото множество K е петоъгълникът (0;1), E, D, (2;0), (0;0).



Фигура 3. Допустимо множество K за $t \in \left[\frac{145}{71}; \frac{5}{2}\right]$.

В този случай: $Z(0;1) = 2$, $Z(2;0) = 2$, $Z(D) = \frac{50t-190}{37t-125} + \frac{120t-300}{37t-125} = \frac{170t-490}{37t-125}$, $Z(E) = \frac{20t+20}{29t-25} + \frac{48t-60}{29t-25} = \frac{68t-40}{29t-25}$.

Сравняваме $Z(D)$ с 2.

$$\frac{170t-490}{37t-125} \geq 2 \iff 490-170t \geq 250-74t \Rightarrow t \leq 2,5$$

и тъй като $t \leq \frac{5}{2}$, то $Z(D) \geq Z(0;1) = Z(2;0) = 2$.

Сравняваме $Z(E)$ със $Z(D)$:

$$\frac{68t-40}{29t-25}\overset{?}{\geq}\frac{170t-490}{37t-125} \Leftrightarrow (68t-40)(125-37t)\overset{?}{\geq}(29t-25)(490-170t) \Rightarrow$$

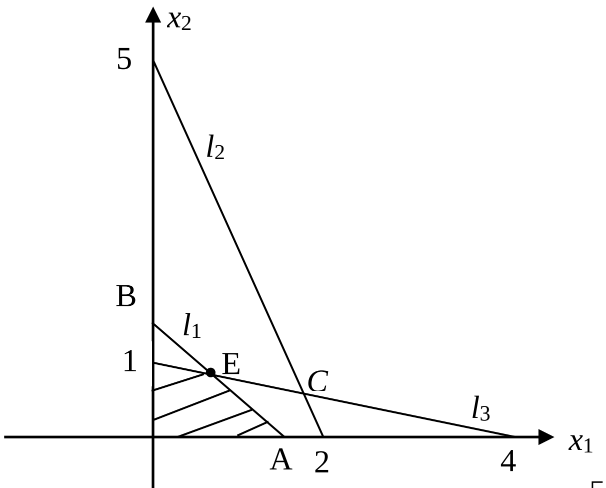
$$(68t-40)(125-37t)\overset{?}{\geq}(29t-25)(490-170t) \Rightarrow 2414t^2-8480t+7250\overset{?}{\geq}0$$

$$\Rightarrow t_1=\frac{145}{71}\ (\approx 2,04),\ \ t_2=\frac{25}{17}\ (\approx 1,47).$$

Следователно $Z(E)\geq Z(D)$ за $t\leq\frac{25}{17}$ и $t\geq\frac{145}{71}$, но $t\geq\frac{145}{71}$ в този случай, следователно за $t\in\left[\frac{145}{71};\frac{5}{2}\right]$, $Z(E)\geq Z(D)$, следователно $Z(E)\geq Z(D)$ или $Z_{\max}=Z(E)=\frac{68t-40}{29t-25}$ и $Z'_{\max}(t)=-\frac{540}{(29t-25)^2}<0 \Rightarrow Z_{\max}(t)$ е намаляваща и $\max Z_{\max}(t)=Z_{\max}\left(\frac{145}{71}\right)\approx 2,82$.

Трети случай.

Допустимото множество K е четириъгълникът (0;1), E, A, (0;0).



Фигура 4. Допустимо множество K за $t\in\left[\frac{5}{2};\ 4\right]$.

В този случай: $Z(0;1)=2$, $Z(A)=Z\left(\frac{5}{t};\ 0\right)=\frac{5}{t}$, $Z(E)=\frac{68t-40}{29t-25}$.

Сравняваме $Z(A)$ с 2:

$\frac{5}{t}\overset{?}{\geq}2 \Rightarrow t\leq\frac{5}{2}$, но в случая $t>\frac{5}{2} \Rightarrow Z(A)<2$

Сравняваме $Z(E)$ с 2:

$\frac{68t-40}{29t-25}\overset{?}{\geq}2 \Rightarrow 34t-20\overset{?}{\geq}29t-25 \Rightarrow 5t\overset{?}{\geq}-5 \Rightarrow t\overset{?}{\geq}-1.$

Следователно за $t\in\left[\frac{5}{2};\ 4\right]$, $Z(E)>2>Z(A)$. Следователно $Z_{\max}=Z(E)=\frac{68t-40}{29t-25}$.

Окончателно:

- за $t \in \left[2;\ \frac{145}{71}\right]$, $Z_{\max} = Z\left(\frac{16}{9};\ \frac{5}{9}\right) = \frac{26}{9} \approx 2{,}88$;
- за $t \in \left[\frac{145}{71};\ 4\right]$, $Z_{\max} = Z(E) = \frac{68t-40}{29t-25}$ и $\max Z_{\max}(t) = Z_{\max}\left(\frac{145}{71}\right) \approx 2{,}82$.

Следователно за всяко $t \in [2;\ 4]$, $\max Z = Z\left(\frac{16}{9};\ \frac{5}{9}\right) = 2{,}88$.

Заключение

На основа на аналитичното решаване на поставената задача могат да бъдат направени следните изводи:

1. За да се постигне максимална печалба, която ще е 2,88 ед. е необходимо параметърът да приеме стойност в интервала $t \in \left[2;\ \frac{145}{71}\right]$. Точната стойност на параметъра може да бъде определена от допълнителни условия като например, качеството на кой от двата продукта е с по-голяма тежест и там да бъдат заложени по-големи разходни норми.
2. От голямо значение е интервалът на изменение на параметъра *t*. При по-широки или по-тесни граници на изменение, резултатите по отношение за вземане на мениджърско решение могат да бъдат съвсем различни.
3. От не по-малко значение е и броят на ограничителните условия. С други думи решаващи за оптимален избор на стратегия в двупродуктовия модел са броят на суровините, които се използват за производството на крайните продукти.

References

1. Atanasov, B., R. Nikolaev, T. Milkova, D. Mihaylov. (2015) *Izsledvane na operaciite*. Varna: Nauka i ikonomika.
2. Atanasov, B., R. Nikolaev, R. Miryanov, Y. Petkov, V. Yordanova. (2014) *Matematika i optimizatsionni metodi*. Varna: Nauka i ikonomika.
3. Atanasov, B., R. Nikolaev, V. Boshnakov, T. Milkova, Y. Petkov. (2010) *Optimizatsionni metodi*. Varna: Nauka i ikonomika.
4. Atanasov, B., P. Petrov, R. Nikolaev. (2006) *Optimizatsionni metodi – II chast matematika*. Varna:Nauka i ikonomika.
5. Atanasov, B., R. Nikolaev, R. Miryanov. (2012) *Kolichestveni metodi v upravlenieto*. Varna: Nauka i ikonomika.
6. Atanasov, B., T. Milkova. (2011) *Kolichestveni metodi v logistikata*. Varna: Nauka i ikonomika.
7. Bonev, K., N. Lalova, A. Ivanov. (1989) *Matematichesko modelirane*. Knigoizdatelstvo „G. Bakalov“, Varna, s. 169.
8. Goncharenko i dr. (2013) *Metody optimal'nykh resheniy v ekonomike i finansakh*. Moskva: KnoRus.
9. Nevezhin V. P., S. I. Kruzhilov, Yu. V. Nevezhin. (2012) Issledovaniye operatsiy i prinyatiye resheniy v ekonomike. Moskva: Forum.
10. Vil'yams, N. N. (1976) *Parametricheskoye programmirovaniye v ekonomike*. Moskva: Statistika, s. 46.